Неједнакости

Теорема (Неједнакости између средина)**.** *За произвољне позитивне реалне бројеве* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *важи:*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$
$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

Притом се између било која два од наведених израза достиже једнакост ако и само ако важи $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Горња четири израза називају се, редом, *хармонијска*, *геометријска*, *аритметичка* и *квадратна средина* бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Дајемо одмах један пример којим се илуструје како се, на основу ових неједнакости, може врло брзо добити нека (на први поглед неповезана) неједнакост.

Пример. За произвољне позитивне реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_n$ важи:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

Заиста, применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине (где обе стране помножимо са n) добијамо:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geqslant n\sqrt[n]{\cancelto{1}{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}}} = n.$$

Задатак 1. *Нека су* a, b *и* c *ненегативни реални бројеви за које важи* $a^2+b^2+c^2=3$. *Доказати:*

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2} \leqslant 1, \tag{1}$$

и одредити када се достиже једнакост.

Решење. Множећи обе стране са $(a+2)(b+2)(c+2)$, неједнакост коју треба доказати се своди на:

$$a(a+2)(c+2)+b(a+2)(b+2)+c(b+2)(c+2) \leqslant (a+2)(b+2)(c+2).$$

После развијања леве и десне стране и потирања израза који се јављају на обе стране, преостаје доказати:

$$a^2c+ab^2+c^2b+2a^2+2b^2+2c^2 \leqslant abc+8.$$

Коришћењем услова $a^2+b^2+c^2=3$, тј. $2a^2+2b^2+2c^2=6$, добијена неједнакост се даље своди на

$$a^2c+ab^2+c^2b \leqslant abc+2. \tag{2}$$

Приметимо да циклична замена променљивих (тј. $a\mapsto b$, $b\mapsto c$, $c\mapsto a$) оставља полазну једнакост (1) непромењеном. Дакле, можемо, без умањења општости, претпоставити да је b „средња“ променљива по величини, тј. важи нешто од $a\leqslant b\leqslant c$ или $a\geqslant b\geqslant c$ (будући да, ако то није испуњено, оваквим цикличним изменама можемо жељену неједнакост свести на тај случај). У том случају важи

$$a(b-a)(b-c)\leqslant 0. \tag{3}$$

Развијањем леве стране добијамо $ab^2-a^2b-abc+a^2c\leqslant 0$, тј. $ab^2+a^2c\leqslant a^2b+abc$. Додавањем израза c^2b на обе стране, добијамо

$$ab^2+a^2c+c^2b\leqslant a^2b+abc+c^2b.$$

Будући да важи ова неједнакост, примећујемо да, да бисмо доказали (2), довољно је доказати још $a^2b+abc+c^2b\leqslant abc+2$. Ово се своди на $b(a^2+c^2)\leqslant 2$, тј. (користећи опет услов $a^2+b^2+c^2=3$) остаје показати

$$b(3-b^2)\leqslant 2. \tag{4}$$

Једноставно се испитује када функција с леве стране достиже максимум: њен први извод је $3-3b^2$, и он има нулу у тачки $b=1$ (и такође $b=-1$, што није релевантно због услова да су a,b,c ненегативни) и ту мења знак из позитивног у негативан, што значи да се у тачки $b=1$ достиже максимум функције $b(3-b^2)$, и тај максимум износи 2; то управо даје (4), што је и требало доказати.

Преостаје још одговорити на питање када се у неједнакости (1) достиже једнакост. Да би се достигла једнакост, неопходно је да се у обе неједнакости (3) и (4) достигне једнакост. Већ смо видели да се у (4) једнакост достиже само за $b=1$. Да би се у (3) достигла једнакост, мора важити нешто од $a=0$, $b=a$ или $b=c$. У последња два случаја, из $a=b=1$, односно $c=b=1$, добијамо $a=b=c=1$ (преко $a^2+b^2+c^2=3$). У случају $a=0$, поново преко $a^2+b^2+c^2=3$ налазимо $c=\sqrt{2}$. Коначно, треба узети у обзир и то да смо претпоставили да је b „средња“ променљива по величини, па уколико елиминишемо ову претпоставку, на пронађене случајеве једнакости треба додати и оне који се добијају цикличном заменом променљивих. Све заједно, једнакост се достиже за:

$$(a,b,c)\in\big\{(1,1,1),(0,1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0,1)\big\}.$$

Тиме је задатак решен. $\square$

Задатак 2. *Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које важи $a+b+c=3$. Доказати:*

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{5}$$

Решење. Покушајмо да на имениоце применимо неједнакост између аритметичке и геометријске средине: $b^2+1\geqslant 2\sqrt{b^2\cdot 1}=2b$ итд. Тиме добијамо

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\leqslant\frac{a}{2b}+\frac{b}{2c}+\frac{c}{2a};$$

међутим, будући да ова неједнакост ограничава израз с леве стране *одозго*, а постављена неједнакост (5) тражи *доње* ограничење за тај израз, овај приступ не може довести до решења.

Сада ћемо видети како се ова идеја да искористимо примећену неједнакост између аритметичке и геометријске средине на имениоцима ипак може адаптирати на начин да добијемо неједнакост у „правом" смеру и тако решимо задатак. Запишимо:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+1}=\frac{a}{b^2+1}-a+a=\frac{a-ab^2-a}{b^2+1}+a=a-\frac{ab^2}{b^2+1};\\ \text{(слично)}\quad\frac{b}{c^2+1}=b-\frac{bc^2}{c^2+1};\\ \text{(слично)}\quad\frac{c}{a^2+1}=c-\frac{ca^2}{a^2+1}.\end{aligned}$$

Дакле, неједнакост (5) еквивалентна је са

$$a-\frac{ab^2}{b^2+1}+b-\frac{bc^2}{c^2+1}+c-\frac{ca^2}{a^2+1}\geqslant\frac{3}{2},$$

па користећи $a+b+c=3$, горња неједнакост се своди на

$$\frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Приметимо, у овој неједнакости на левој страни се појављују разломци с истим имениоцима као и у полазној неједнакости, али сад треба показати *горње* ограничење тог израза, што је управо оно што се може добити применом идеје с почетка. Дакле, на основу те идеје имамо:

$$\frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1}\leqslant\frac{ab^{\cancel{2}}}{2\cancel{b}}+\frac{bc^{\cancel{2}}}{2\cancel{c}}+\frac{ca^{\cancel{2}}}{2\cancel{a}},$$

па треба још доказати $\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}\leqslant\frac{3}{2}$, тј. $ab+bc+ca\leqslant 3$. Имамо $3=\frac{9}{3}=\frac{(a+b+c)^2}{3}$, па је претходна неједнакост еквивалентна са

$$3(ab+bc+ca)\leqslant(a+b+c)^2.$$

После развијања десне стране и потирања израза који се појављују на обе стране, видимо да преостаје доказати још $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Множећи ово са 2 и пребацивањем свега на леву страну преостаје доказати $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqslant 0$. Међутим, лева страна се може записати у облику $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, а овај израз је очигледно ненегативан, чиме је задатак решен. $\square$

Задатак 3. *Доказати да за све реалне бројеве* a, b *и* c *важи:*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Решење. Праволинијски се проверава идентитет:

$$2(a^2+b^2+c^2)^2-6(a^3b+b^3c+c^3a) = \sum_{\substack{\text{по цикличним}\\ \text{пермутацијама}\\ (a,\,b,\,c)}} (a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2$$

(напоменимо,

$$\sum_{\substack{\text{по цикличним}\\ \text{пермутацијама}\\ (a,\,b,\,c)}} f(a,b,c) = f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b),$$

у случају да није јасна ознака), а како је десна страна очигледно ненегативна (јер је сума неких квадрата), тиме је задатак решен. $\square$